

---

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

### Φυλλάδιο 3

---

#### 1 Εφαρμογές του εσωτερικού-εξωτερικού γινομένου

**Άσκηση 1.1** Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{OA}$  και  $\vec{OB}$ . Να δείξετε ότι το διάνυσμα

$$\|\vec{OB}\|\vec{OA} + \|\vec{OA}\|\vec{OB}$$

έχει τη διεύθυνση της διχοτόμου της γωνίας  $\angle AOB$ . Να βρείτε τη διεύθυνση της διχοτόμου της παραπληρωματικής γωνίας.

**Άσκηση 1.2** Να δείξετε ότι τα σημεία  $A(3, 1, 1)$ ,  $B(1, 1, 1)$  και  $C(1, 3, 5)$  ορίζουν ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου να βρείτε τις γωνίες και τα μήκη των πλευρών.

**Άσκηση 1.3** Δείξτε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των τεσσάρων πλευρών του.

**Άσκηση 1.4** Δίνεται το παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Ενώνουμε την κορυφή  $\Delta$  με τα μέσα  $E$  και  $Z$  των πλευρών  $AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Δείξτε (διανυσματικά) ότι οι  $\Delta E$  και  $\Delta Z$  διαιρούν τη διαγώνιο  $A\Gamma$  σε τρία ίσα μέρη.

**Άσκηση 1.5** Να δειχθεί ότι το διάνυσμα θέσης του σημείου τομής  $G$  των διαμέσων (κέντρο βάρους) τριγώνου  $ABC$ , ως προς αρχή  $O$ , είναι:

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

**Άσκηση 1.6** Να αποδείξετε τον τύπο του Ήρωνα για το εμβαδό  $\mathcal{E}$  τριγώνου:

$$\mathcal{E} = \sqrt{\tau(\tau - a)(\tau - b)(\tau - c)},$$

όπου  $\tau$  είναι η ημιπερίμετρος και τα  $a, b, c$  τα μήκη των πλευρών του.